Character degree products and class length products of some finite groups (Research on algebraic combinatorics, related groups and algebras)

AUTHOR(S):

飛田, 明彦; 清田, 正夫

CITATION:

飛田, 明彦 ...[et al]. Character degree products and class length products of some finite groups (Research on algebraic combinatorics, related groups and algebras). 数理解析研究所講究録 2020, 2148: 166-174

ISSUE DATE:

2020-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/255038

Character degree products and class length products of some finite groups

Akihiko Hida (Faculty of Education, Saitama University)
飛田明彦 (埼玉大学教育学部)
Masao Kiyota (Tokyo Medical and Dental University)
清田正夫 (東京医科歯科大学名誉教授)

1 Introduction

G を有限群, $\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \ldots, C_s\}$ を G の共役類の全体, $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_s\}$ を G の通常既約指標の全体の集合とする。$\mathrm{Cl}(G)$ と $\mathrm{Irr}(G)$ の間の双対性については, 様々な関係が知られているがまだ未解明の部分も多い。

ここでは共役類の大きさ $|C_i|$ と指標の次数 $\chi_i(1)$ の関係について考察する。共役類の積 $\prod C_i$ については様々な研究がされており (例えば [5], [11, 4.4]) , 一方, その双対として指標の積についての研究もなされている (例えば [4])。ここでは, 最も基本的な数である共役類の大きさと既約指標の次数に着目した原田耕一郎氏による次の予想を考える。

Conjecture 1.1 ([6])**.** 有限群 G に対して, 指標の次数の積は共役類の大きさの積の約数である。

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) \;\Big|\; \prod_{i=1}^{s} |C_i|$$

なお, 千吉良直紀氏は多くの具体的な群について予想を検証し, さらに交換子群の位数に着目した予想を提案している。

Example 1.2. G を位数 8 の二面体群とする。共役類の大きさは $1, 1, 2, 2, 2$, 指標の次数は $1, 1, 1, 1, 2$ であり,

$$\prod_{i=1}^{s} |C_i| = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$$

となり Conjecture 1.1 は成立する。

モジュラー表現と p-ブロックの理論を経由することにより次の結果が得られている。

Theorem 1.3 (Kiyota)**.** G のすべての Sylow 部分群が可換ならば, Conjecture 1.1 が成立する。

また, 対称群と交代群に対して予想は成立する ([7] 参照)。

Theorem 1.4. 対称群 S_n と交代群 A_n に対して Conjecture 1.1 が成り立つ。

以下, 第 2 章では共役類の大きさが 2 種類である群と, 既約指標の次数が 2 種類である群の場合を考察する。第 3 章では Brauer 指標の次数と p-正則共役類の大きさの関係, 既約加群の vertex との関係について考察する。最後に第 4 章では $p = 2$, $G = A_6, A_7$ の場合の具体例について述べる。

2 共役類の大きさ, 指標の次数が 2 種類の群

p を素数とし, G を有限 p-群とする。このとき, 共役類の大きさと既約指標の次数はどちらも p のべきであるから, Conjecture 1.1 は不等式

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) \leq \prod_{i=1}^{s} |C_i|$$

と同値となる。 ここで p-群の共役類に関する次の条件を考える。

Conjecture 2.1.

$$\left(\frac{|G|}{s}\right)^s \leq \prod_{i=1}^{s} |C_i|^2$$

左辺は $|C_i|$ の平均の積である。

Example 2.2. $p = 2$ とし, G を位数 8 の二面体群とする。$s = 5$ であり,

$$\left(\frac{|G|}{s}\right)^s = \left(\frac{8}{5}\right)^5 \leq 2^6 = (2^2)^3 = \prod_{i=1}^{s} |C_i|^2$$

となり Conjecture 2.1 は成立している。

Remark 2.3. 一般に

$$\frac{|G|}{s} = \frac{\sum_{i=1}^{s} \chi_i(1)^2}{s} \geq \Big(\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1)^2\Big)^{1/s}$$

であるから, Conjecture 2.1 が成り立てば,

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) \leq \left(\frac{|G|}{s}\right)^{s/2} \leq \prod_{i=1}^{s} |C_i|$$

が成り立ち, p-群について Conjecture 1.1 が成り立つ。

なお, Conjecture 2.1 は, p-群とは限らない一般の有限群に対しても成り立つのではないかと予想される。

共役類の大きさが 2 種類であるような p-群に対しては, Conjecture 2.1 が成り立つ [7]。さらに, G を p-群とは限らない一般の有限群で, 共役類の大きさが 2 種類であるとする。このとき, G はある素数 p について, p-群と可換群の直積となる [10]。よって, この場合には Conjecture 1.1 が成り立つ。次に指標の次数の種類に着目する。

$$c.d(G) = \{\chi_i(1) \mid 1 \le i \le s\}$$

とおき $|c.d.(G)| = 2$ の場合を考える。

Proposition 2.4 ([9, (12.5)]). $c.d.(G) = \{1, m\}$ とすると次のいずれかが成り立つ。

(a) $|G : A| = m$ である可換正規部分群 A が存在する。
(b) G は p-群と可換群の直積となる。

上記の (a) の場合には状況は簡明で次が得られる。

Proposition 2.5. $c.d.(G) = \{1, m\}$ であり $|G : A| = m$ である可換正規部分群 A が存在すると仮定する。このとき,

$$\prod_{i=1}^{s} \chi_i(1) \;\Big|\; \prod_{C \in \mathrm{Cl}(G),\ C \subset A} |C|$$

が成り立つ。特に, Conjecture 1.1 は成立する。

(b) の場合は p-群に帰着されるので, $|c.d.(G)| = 2$ である p-群に対して, Conjecture 1.1 を証明することが現段階で懸案の問題である。

3　モジュラー表現

p を素数とする。ここでは Brauer 指標との関係について考察する。ここで述べる結果はほとんどすべて G の p-ブロックに拡張されるが, ここでは p-ブロックへの細分は扱わず, 群 G の問題として考えることにする。自然数 n に対してその p-part を n_p とおく。Conjecturer 1.1 において, p-part のみに着目すると次のようになる。

Conjecture 3.1.

$$\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)_p \;\Big|\; \prod_{C \in \mathrm{Cl}(G)} |C|_p$$

k を正標数 p の代数的閉体とする。既約 kG-加群に対しその Brauer 指標を考える。Brauer 指標は G の p-正則元の集合 $G_{p'}$ で定義される複素数値関数となる。既約 Brauer 指標の全体を $\mathrm{IBr}(G)$ で表す。G の p-正則共役類の集合を $\mathrm{Cl}(G_{p'})$ とする。$|\,\mathrm{IBr}(G)| = |\,\mathrm{Cl}(G_{p'})|$ である。Conjecture 3.1 の類似として次が考えられる。

Conjecture 3.2.

$$\prod_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} \varphi(1)_p \;\Big|\; \prod_{C\in\mathrm{Cl}(Gp')} |C|_p$$

Proposition 3.3. G が p-可解群のときには Conjecture 3.2 は成り立つ。

次に Conjecture 3.1, 3.2 を defect を用いて言い換えることを試みる。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ に対して,

$$(|G|/\chi(1))_p = p^{d(\chi)}$$
$$(|G|/\varphi(1))_p = p^{d(\varphi)}$$

とおきそれぞれ χ, φ の defect と呼ぶ。これらは整数であり $d(\chi) \geq 0$ であるが, $d(\varphi)$ は負の数となることもある。また G の共役類 C と $x \in C$ に対し,

$$|C_G(x)|_p = p^{d(C)}$$

とおき, $d(C)$ を C の defect と呼ぶ。この用語を用いると,

$$\text{Conjecture 3.1} \iff \sum_{C\in\mathrm{Cl}(G)} d(C) \leq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} d(\chi) \tag{3.1}$$

$$\text{Conjecture 3.2} \iff \sum_{C\in\mathrm{Cl}(G_{p'})} d(C) \leq \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d(\varphi) \tag{3.2}$$

と言い換えられる。次に, この 2 つの関係を調べる。G の p-元からなる共役類の代表元の集合を $\mathcal{P}_0(G)$ とおく。このとき,

$$|\,\mathrm{Irr}(G)| = |\,\mathrm{Cl}(G)| = \sum_{x\in\mathcal{P}_0(G)} |\,\mathrm{Cl}(C_G(x)_{p'})| = \sum_{x\in\mathcal{P}_0(G)} |\,\mathrm{IBr}(C_G(x))|$$

である。この等式に重みを付けた形の次の不等式を考える。

$$\sum_{x\in\mathcal{P}_0(G),\ \varphi\in\mathrm{IBr}(C_G(x))} d(\varphi) \leq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} d(\chi) \tag{3.3}$$

この不等式は一般には成り立たない。しかし, この不等式が成り立つ場合には Conjecture 3.1 と Conjecture 3.2 を結びつけることができる。

Theorem 3.4. 不等式 (3.3) が成り立つ場合には, Conjecture 3.2 が成り立てば Conjecture 3.1 も成り立つ。

どのような群について不等式 (3.3) が成り立つのかはよくわかっていないが, 例えば G が p-群のときは, 不等式 (3.3) は Conjecture 1.1 と同値である。この事実の一般化として p-ブロックに関する次の命題が成り立つ。

Proposition 3.5. b を G の冪零ブロック, D を b の defect 群とすると次は同値である。

(1) D に対して Conjecture 1.1 が成り立つ。
(2) b に対して Conjecture 3.1 (のブロックへの細分) が成り立つ。
(3) b に対して不等式 (3.3) (のブロックへの細分) が成り立つ。

次に直既約加群の vertex について考察する。H を G の部分群とする。kG-加群 M と kH-加群 N に対して,

$$\mathrm{Res}_H^G(M), \quad \mathrm{Ind}_H^G(N)$$

をそれぞれ H への制限, G への誘導加群とする。直既約 kG-加群 M に対して, M が $\mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{Res}_Q^G(M)$ の直和因子となるような部分群 Q の中で極小なものを M の vertex と呼び $\mathrm{vx}(M)$ と表す。これは M により G-共役を除いて一意的に定まる G の p-部分群である。直既約 kG-加群の次元と vertex の位数については,

$$|G : \mathrm{vx}(M)|_p \,\Big|\, (\dim M)_p$$

が成り立つ。

一般に, 既約 kG-加群の vertex としてどの p-部分群が現れるのか, ということは表現論的に非常に重要な情報である。既約 kG-加群 S に対応する Brauer 指標を φ とすると $\dim S = \varphi(1)$ である。よって, もし Conjecture 3.2 が成り立つならば,

$$\prod_S |G : \mathrm{vx}(S)|_p \,\Big|\, \prod_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \varphi(1) \,\Big|\, \prod_{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})} |C|_p$$

となる。C の defect $d(C)$ を用いて上式を書きかえると

$$\prod_{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})} p^{d(C)} \leq \prod_S |\,\mathrm{vx}(S)|$$

となる。これは元の Conjecture 3.2 よりだいぶ弱い主張であるが, 実際に成り立つことがわかる。

Theorem 3.6 ([8])**.** 不等式

$$\prod_{C \in \mathrm{Cl}(G_{p'})} p^{d(C)} \leq \prod_S |\,\mathrm{vx}(S)|$$

が成り立つ。さらに次は同値である。

(1) この不等式において等号が成り立つ。
(2) G は p-冪零群である。

Remark 3.7. 上の Theorem 3.6 は講演時には予想として述べたが, その後 [1], [3] 等の結果より導かれることがわかった。さらに, 後半の主張にあるように, 等号が成り立つ状況は特殊な場合のみであることがわかった。

4 Example

ここでは具体例として, $p=2$ とし, G が交代群 A_6, A_7 の場合について取り上げる。これらは二面体群を defect 群に持つ 2-ブロックの特別な場合である ([2] 参照)。

以下の (1) から (6) において, 次のことをまとめた。

(1) 共役類の代表とその中心化群の位数, 共役類の defect について。
(2) 既約指標の次数 $\chi(1)$ $(\chi \in \mathrm{Irr}(G))$ と既約 Brauer 指標の次数 $\varphi(1)$ $(\varphi \in \mathrm{IBr}(G))$, φ に対応する既約 kG-加群の vertex の位数について。なお, 位数が 8 の vertex は Sylow 2-群であり, 位数が 4 の vertex は $C_2 \times C_2$ と同型な部分群である。
(3) 2-元の中心化群とその既約 Brauer 指標の defect について。$G=A_6$ のときは, G 以外の中心化群は 2-群であるので既約 Baruer 指標は自明なものしかない。
(4) Conjecture 3.1 と 3.2, つまり (3.1) と (3.2) の検証。(1) と (2) から得られた defect の和を比較した。
(5) 不等式 (3.3) 成立の検証。(2) から得られた $d(\chi)$ の和と, (3) から得られた $d(\varphi)$ の和を比較した。
(6) Theorem 3.6 の検証。第 1 列は 2-正則元の中心化群の位数の 2-part, 第 2 列は既約 Brauer 指標の次数の情報, 第 3 列には対応する既約 kG-加群の vertex の位数を記した。第 1 列の積と第 3 列の積の比較が Theorem 3.6 である。なお, Conjecture 3.2 は第 1 列と第 2 列の比較であり, Theorem 3.6 との違いが現われている。

4.1 $p=2$, $G=A_6$

(1)

order of x	1	2	4	3	3	5	5
$\lvert C_G(x)\rvert$	360	8	4	9	9	5	5
$\lvert C_G(x)\rvert_2$	8	8	4	1	1	1	1
$d(C)$	3	3	2	0	0	0	0

(2)

$\chi(1)$	1	5	5	9	10	8	8
$(\lvert G\rvert/\chi(1))_2$	8	8	8	8	4	1	1
$d(\chi)$	3	3	3	3	2	0	0

$\varphi(1)$	1	4	4	8	8
$(\lvert G\rvert/\varphi(1))_2$	8	2	2	1	1
$d(\varphi)$	3	1	1	0	0
$\lvert \mathrm{vx}\, S\rvert$	8	4	4	1	1

(3)

order of x	$C_G(x)$
1	G
2	$D_8 \in \mathrm{Syl}_2(G)$
4	C_4

• $C_G(2) = D_8$

$\varphi(1)$	1
$(\lvert C_G(x)\rvert/\varphi(1))_2$	8
$d(\varphi)$	3

• $C_G(4) = C_4$

$\varphi(1)$	1
$(\lvert C_G(x)\rvert/\varphi(1))_2$	4
$d(\varphi)$	2

(4)

$$\sum_{C\in\mathrm{Cl}(G)} d(C) = 3+3+2 = 8 \leq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} d(\chi) = 3+3+3+3+2 = 14$$

$$\sum_{C\in\mathrm{Cl}(G_{p'})} d(C) = 3 \leq \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)} d(\varphi) = 3+1+1 = 5$$

(5)

$$\sum_{x\in\mathcal{P}_0(G),\ \varphi\in\mathrm{IBr}(C_G(x))} d(\varphi) = (3+1+1)+3+2 = 10 \leq \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} d(\chi) = 14$$

(6)

$2^{d(C)}$	$(\lvert G\rvert/\varphi(1))_2$	$\lvert \mathrm{vx}(S)\rvert$
8	8	8
1	2	4
1	2	4
1	1	1
1	1	1

4.2 $p = 2$, $G = A_7$

(1)

order of x	1	2	3	3	4	5	6	7	7
$\lvert C_G(x)\rvert$	2520	24	36	9	4	5	12	7	7
$\lvert C_G(x)\rvert_2$	8	8	4	1	4	1	4	1	1
$d(C)$	3	3	2	0	2	0	2	0	0

(2)

$\chi(1)$	1	14	15	21	35	6	10	10	14
$(\lvert G\rvert/\chi(1))_2$	8	4	8	8	8	4	4	4	4
$d(\chi)$	3	2	3	3	3	2	2	2	2

$\varphi(1)$	1	14	20	6	4	4
$(\lvert G\rvert/\varphi(1))_2$	8	4	2	4	2	2
$d(\varphi)$	3	2	1	2	1	1
$\lvert \mathrm{vx}(S)\rvert$	8	4	4	4	4	4

(3)

order of x	$C_G(x)$
1	G
2	$C_3 \rtimes D_8$
4	C_4

- $C_G(2) = C_3 \rtimes D_8$

$\varphi(1)$	1	2
$(\lvert C_G(x)\rvert/\varphi(1))_2$	8	4
$d(\varphi)$	3	2

- $C_G(4) = 4$

$\varphi(1)$	1
$(\lvert C_G(x)\rvert/\varphi(1))_2$	4
$d(\varphi)$	2

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} d(C) &= 3+3+2+2+2 = 12\\ &\leq \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} d(\chi) = 3+2+3+3+3+2+2+2+2 = 22\end{aligned}$$

$$\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G_{p'})} d(C) = 3+2 = 5 \leq \sum_{\varphi\in \mathrm{IBr}(G)} d(\varphi) = 3+2+1+2+1+1 = 10$$

(5)

$$\begin{aligned}\sum_{x\in \mathcal{P}_0(G),\ \varphi\in \mathrm{IBr}(C_G(x))} d(\varphi) &= (3+2+1+2+1+1)+(3+2)+2 = 17\\ &\leq \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} d(\chi) = 22\end{aligned}$$

(6)

$\lvert 2^{d(C)}\rvert$	$(\lvert G\rvert/\varphi(1))_2$	$\lvert \mathrm{vx}(S)\rvert$
8	8	8
1	4	4
1	2	4
4	4	4
1	2	4
1	2	4

謝辞

大浦学さんをはじめ、お世話になりました関係の方々に深く感謝します。

参考文献

[1] M. Broué, Sur l'induction des modules indécomposables et la projectivité relative, Math. Z. 149 (1976), 227-245.

[2] K. Erdmann, Principal blocks of groups with dihedral Sylow 2-subgroups, Comm. Alg. 5 (1977), 665-694.

[3] J. A. Green, On the indecomposable representations of a finite group, Math. Z. 70 (1959), 430-445.

[4] P. X. Gallagher, Class product and character product, Arch. Math. 102 (2014), 201-207.

[5] K. Harada, On a theorem of Brauer and Wielandt, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3825-3829.

[6] K. Harada, Revisiting character theory of finite groups, Bulletin of the Inst. Math. Academia Sinica (New Series) 13 (2018), 383-395.

[7] A. Hida, Harada's conjecture on character degrees and class sizes —symmetric and alternating groups—, 数理解析研究所講究録 2086 (2018), 144-153.

[8] A. Hida and M. Kiyota, Lower defect groups and vertices of simple modules, preprint.

[9] I. M. Isaacs, Character theory of finite groups, Academic Press, 1976.

[10] N. Ito, On finite groups with given conjugate types I, Nagoya Math. J. 6 (1953), 17-28.

[11] G. Navarro, Character theory and the McKay conjecture, Cambridge studies in advanced mathematics 175, Cambridge University Press, 2018.